на основании которых мы можем составить следующую таблицу однородных объектов, входящих в состав объекта кривизны-кручения:

Объект кривизны-кручения	Однородные подобъекты (I) объекта $\{\tilde v\}$ $R=(i,\overset{d}{(1)},\dots,\overset{d}{(p-1)})$	Подобъекты (П), входящие в состав подобъектов (I) $\alpha=\overline{0,p-2}$	Тензоры, содержащиеся в подобъектах (П)
$\{\tilde v\}$	$\{\tilde v^1_{bR}\}$	$\{\tilde v^1_{b1}\}, \{\tilde v^{1\,(\alpha)}_{b\ c}\ \tilde v^{1\,(\alpha+1)}_{b\ c}\}, \{\tilde v^{1\,(p-1)}_{b\ c}\}$	$\{\tilde v^1_{b1}\}, \{\tilde v^{1\,(p-1)}_{b\ c}\}$
	$\{\tilde v^a_{b1R}\}$	$\{\tilde v^a_{b11}\}, \{\tilde v^{a\,(\alpha)}_{b1c}\ \tilde v^{a\,(\alpha+1)}_{b1\ c}\}, \{\tilde v^{a\,(p-1)}_{b1\ c}\}$	$\{\tilde v^a_{b11}\}, \{\tilde v^{a\,(p-1)}_{b1\ c}\}$
	$\{\bar v^a_{b(2)R}\ \tilde v^a_{b1R}\}$ $(s=2)$	$\{\bar v^a_{b(2)1}\ \tilde v^a_{b11}\}, \{\bar v^{a\ (p-1)}_{b(2)c}\ \tilde v^{a\,(p-1)}_{b1\ c}\}$, $\{\bar v^{a\ (\alpha)}_{b(2)c}\ \tilde v^{a\,(\alpha)}_{b1c}\ \bar v^{a\ (\alpha+1)}_{b(2)\ c}\ \tilde v^{a\,(\alpha+1)}_{b1\ c}\}$	
	$\{\bar v^a_{b(2)R}\ \tilde v^a_{b1R}\}$ $\left.\begin{matrix} s=\overline{3,p-1}, \\ g=s-2\end{matrix}\right\}\Rightarrow s-g=2$	$\{\bar v^a_{b(2)1}\ \tilde v^a_{b11}\}, \{\bar v^{a\ (p-1)}_{b(2)\ c}\ \tilde v^{a\,(p-1)}_{b1\ c}\}$, $\{\bar v^{a\ (\alpha)}_{b(2)c}\ \tilde v^{a\,(\alpha)}_{b1c}\ \bar v^{a\ (\alpha+1)}_{b(2)c}\ \tilde v^{a\,(\alpha+1)}_{b1\ c}\}$	
	$\{\bar v^a_{b(s-g)R}\ \bar v^a_{b(s-g-1)R}\ \tilde v^a_{b1R}\}$ $s=\overline{4,p-1}$, $g=\overline{1,s-3}$.	$\{\bar v^a_{b(s-g)1}\ \bar v^a_{b(s-g-1)1}\ \tilde v^a_{b11}\}$, $\{\bar v^{a\ (\alpha)}_{b(s-g)c}\ \bar v^{a\ (\alpha)}_{b(s-g-1)c}\ \tilde v^{a\,(\alpha)}_{b1c}$, $\bar v^{a\ (\alpha+1)}_{b(s-g)\ c}\ \bar v^{a\ (\alpha+1)}_{b(s-g-1)c}\ \tilde v^{a\,(\alpha+1)}_{b1\ c}\}$, $\{\bar v^{a\ (p-1)}_{b(s-g)\ c}\ \bar v^{a\ (p-1)}_{b(s-g-1)\ c}\ \tilde v^{a\,(p-1)}_{b1\ c}\}$	
	$\{\tilde v^a_{b(s)R}\ \tilde v^a_{b(s-\delta)R}\ \bar v^a_{b(s-\delta)R}\ \tilde v^a_{b1R}\}$ $s=\overline{3,p-1}$, $\delta=\overline{1,s-2}$.	$\{\tilde v^a_{b(s)1}\ \tilde v^a_{b(s-\delta)1}\ \bar v^a_{b(s-\delta)1}\ \tilde v^a_{b11}\}$, $\{\tilde v^{a\ (\alpha)}_{b(s)c}\ \tilde v^{a\ (\alpha)}_{b(s-\delta)c}\ \bar v^{a\ (\alpha)}_{b(s-\delta)c}\ \tilde v^{a\,(\alpha)}_{b1c}$ $\tilde v^{a\ (\alpha+1)}_{b(s)\ c}\ \tilde v^{a\ (\alpha+1)}_{b(s-\delta)\ c}\ \bar v^{a\ (\alpha+1)}_{b(s-\delta)\ c}\ \tilde v^{a\,(\alpha+1)}_{b1\ c}\}$, $\{\tilde v^{a\ (p-1)}_{b(s)\ c}\ \tilde v^{a\ (p-1)}_{b(s-\delta)\ c}\ \bar v^{a\ (p-1)}_{b(s-\delta)\ c}\ \tilde v^{a\,(p-1)}_{b1\ c}\}$	
	$\{\tilde v_{bR}\ \tilde v^1_{bR}\}$	$\{\tilde v_{b1}\ \tilde v^1_{b1}\}, \{\tilde v^{(p-1)}_{b\ c}\ \tilde v^{1\,(p-1)}_{b\ \ c}\}$, $\{\tilde v^{(\alpha)}_{bc}\ \tilde v^{1\,(\alpha)}_{b\ c}\ \tilde v^{(\alpha+1)}_{b\ c}\ \tilde v^{1\,(\alpha+1)}_{b\ \ c}\}$	
	$\{\tilde v_{b1R}\ \tilde v_{bR}\ \tilde v^1_{bR}\}$	$\{\tilde v_{b11}\ \tilde v_{b1}\ \tilde v^1_{b1}\}, \{\tilde v^{(p-1)}_{b1c}\ \tilde v^{(p-1)}_{bc}\ \tilde v^{1\,(p-1)}_{b\ \ c}\}$, $\{\tilde v^{(\alpha)}_{b1c}\ \tilde v^{(\alpha)}_{bc}\ \tilde v^{1\,(\alpha)}_{bc}\ \tilde v^{(\alpha+1)}_{b1\,c}\ \tilde v^{(\alpha+1)}_{b\ c}\ \tilde v^{1\,(\alpha+1)}_{b\ \ c}\}$	
	$\{\tilde v^a_{(bc)R}\ \tilde v^1_{bR}\}$.	$\{\tilde v^a_{(bc)1}\ \tilde v^1_{b1}\}, \{\tilde v^{a\ (p-1)}_{(bc)\ d}\ \tilde v^{1\,(p-1)}_{b\ \ d}\}$, $\{\tilde v^{a\ (\alpha)}_{(bc)\,d}\ \tilde v^{1\,(\alpha)}_{b\ d}\ \tilde v^{a\ (\alpha+1)}_{(bc)\ d}\ \tilde v^{1\,(\alpha+1)}_{b\ \ d}\}$	
	$\{v^a_{pR^{**}}\}$ $R^{**}=(\overset{c}{C}_{(1)},\dots,\overset{c}{(p-3)})$	$\{v^{a\,(\alpha^*)}_{p\ c}\ v^{a\,(\alpha^*+1)}_{p\ \ c}\}$, $\alpha^*=\overline{0,p-4}$, $\{v^{a\,(p-3)}_{p\ \ c}\}$	$\{v^{a\,(p-3)}_{p\ \ c}\}$
	$\{\tilde v_{2R^*}\}$ $R^*=(\overset{c}{C}_{(1)},\dots,\overset{c}{(p-1)})$	$\{\tilde v^{(\alpha)}_{2c}\ \tilde v^{(\alpha+1)}_{2\ c}\}, \{\tilde v^{(p-1)}_{2\ c}\}$	$\{\tilde v^{(p-1)}_{2\ c}\}$.

ткуда непосредственно следует

Т е о р е м а 3. Объект кривизны-кручения $\{\tilde v\}$ связности Картана, ассоциированной с дифференциальной системой (I), удовлетворяет тождествам (9) и является однородным объектом, присоединенным к расслоению $H^2\times S^{p-1}\to S^{p-1}(V_n)$, состоящим из однородных подобъектов, указанных в таблице.

Библиографический список

1. Е в т у ш и к Л.Е. Редуктивные связности Картана и обобщенные аффинно-нормализованные структуры Нордена // Известия вузов. Матем. 1974. №5. С.87-96.

2. Е в т у ш и к Л.Е., Т р е т ь я к о в В.Б. О структурах, определяемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений высшего порядка // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т.6. С.243-255.

3. Г л и з б у р г В.И. Геометрия системы обыкновенных дифференциальных уравнений высшего порядка // XXУП Научн. конф. ф-та физ.-мат. и естеств. наук: Тез. докл. / УДН им. П.Лумумбы. М., 1991. С.144.

УДК 514.75

СВЯЗНОСТИ НА $\mathcal{H}$-РАСПРЕДЕЛЕНИИ

М.Ф.Г р е б е н ю к

(Киевское ВВАУ)

Настоящая работа относится к дифференциальной геометрии составных распределений многомерного аффинного пространства A_{n+1} и является непосредственным продолжением работы [1]. Рассмотрены связности $\Gamma, \bar\Gamma$ и Γ_1, ассоциированные с неголономными композициями А.П.Нордена, определенными аффинорами $\{P^\pi_\xi\}, \{\Phi^\pi_\xi\}, \{P^a_b\}$. Доказано, что структурные аффиноры $\{P^\pi_\xi\}, \{\Phi^\pi_\xi\}$ $\{P^a_b\}$ ковариантно постоянны в связностях $\Gamma, \bar\Gamma$ и Γ_1, соответственно.

1. Рассмотрим $\mathcal{H}$-распределение, на котором задано поле оснащающего вектора $\vec\nu$:

$$\vec\nu = \nu^p_{n+1}\vec e_p + \nu^i_{n+1}\vec e_i + \nu^\alpha_{n+1}\vec e_\alpha + \vec e_{n+1},$$

где ν^p_{n+1} удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla \nu^{\rho}_{n+1} + \omega^{\rho}_{n+1} = \nu^{\rho}_{n+1,J}\,\omega^{J}. \qquad (1)$$

Из уравнений (1) видно, что при данном выборе поля нормалей первого рода H-распределения, определенных полем квазитензора $\{\nu^{\rho}_{n+1}\}$, возможна частичная канонизация репера $\bar{R}_1$, при которой $\nu^{\rho}_{n+1}=0$. При этом формы ω^{ρ}_{n+1} становятся главными:

$$\omega^{\rho}_{n+1} = \nu^{\rho}_{n+1,J}\,\omega^{J}.$$

Такой репер называется репером, адаптированным полю нормалей первого рода $[A,\vec{\nu}]$ H-распределения. Геометрический смысл этой канонизации состоит в совмещении вектора $\vec{e}_{n+1}$ с нормалью $\vec{\nu}$.

На расслоенном многообразии, базой которого является исходное аффинное пространство A_{n+1}, система форм $\{\omega^{\varkappa}, \omega^{\pi}_{\rho}\}$, где

$$\mathcal{D}\omega^{\varkappa} = \omega^{\rho}\wedge\omega^{\pi}_{\rho} + R^{\pi}_{n+1,K}\,\omega^{n+1}\wedge\omega^{\varkappa},$$

$$\mathcal{D}\omega^{\pi}_{\rho} = \omega^{\sigma}_{\rho}\wedge\omega^{\pi}_{\sigma} + \tfrac{1}{2}R^{\pi}_{\rho\varkappa L}\,\omega^{\varkappa}\wedge\omega^{L},$$

определяет аффинную связность Γ. Тензоры кривизны и кручения связности Γ имеют вид:

$$R^{\pi}_{n+1,\varkappa} = \nu^{\pi}_{n+1,\varkappa}, \quad R^{\pi}_{n+1,n+1} = 0,$$

$$R^{\pi}_{\rho\varkappa L} = 2H_{\rho[\varkappa}\,\nu^{\pi}_{|n+1|L]}, \quad H_{\rho\varkappa} \equiv \{\Lambda_{p\varkappa}, \delta^{\hat{u}}_{\varkappa}M_{i\hat{u}}, \delta^{\hat{\gamma}}_{\varkappa}H_{\alpha\hat{\gamma}}\}.$$

Таким образом, каждому оснащающему полю векторов $\vec{\nu}$ соответствует аффинная связность на оснащающем H-распределении.

2. Аффинные связности, ассоциированные с H-распределением, позволяют ввести новые аффинные связности при помощи форм $\widetilde{\omega}^{\pi}_{\rho}$, получающихся из форм $\omega^{\varkappa}, \omega^{\pi}_{\rho}$ преобразованием

$$\widetilde{\omega}^{\pi}_{\rho} = \omega^{\pi}_{\rho} + \gamma^{\pi}_{\rho\varkappa}\,\omega^{\varkappa}.$$

Для форм $\omega^{\varkappa}, \widetilde{\omega}^{\pi}_{\rho}$ имеем структурные уравнения

$$\mathcal{D}\omega^{\varkappa} = \omega^{J}\wedge\omega^{\varkappa}_{J}, \quad \mathcal{D}\omega^{\rho} = \omega^{\varkappa}\wedge\widetilde{\omega}^{\rho}_{\varkappa} + \tfrac{1}{2}\widetilde{R}^{\rho}_{\varkappa L}\,\omega^{\varkappa}\wedge\omega^{L},$$

$$\mathcal{D}\widetilde{\omega}^{\pi}_{\rho} = \widetilde{\omega}^{\sigma}_{\rho}\wedge\widetilde{\omega}^{\pi}_{\sigma} + \Delta\gamma^{\pi}_{\rho\varkappa}\wedge\omega^{\varkappa},$$

где

$$\widetilde{R}^{\rho}_{\varkappa L} = 2\left(-\delta^{\pi}_{[\varkappa}\gamma^{\rho}_{|\pi|L]} + \delta^{n+1}_{[\varkappa}\nu^{\rho}_{|n+1|L]}\right),$$

$$\Delta\gamma^{\pi}_{p\varkappa} = \nabla\gamma^{\pi}_{p\varkappa} + \gamma^{\sigma}_{p\varkappa}\gamma^{\pi}_{\sigma J}\,\omega^{J} + \Lambda_{pJ}\,\nu^{\pi}_{n+1,\varkappa}\,\omega^{J},$$

$$\Delta\gamma^{\pi}_{i\varkappa} = \nabla\gamma^{\pi}_{i\varkappa} + \gamma^{\sigma}_{i\varkappa}\gamma^{\pi}_{\sigma J}\,\omega^{J} + M_{i\hat{u}}\,\delta^{\hat{u}}_{J}\,\nu^{\pi}_{n+1,\varkappa}\,\omega^{J},$$

$$\Delta\gamma^{\pi}_{\alpha\varkappa} = \nabla\gamma^{\pi}_{\alpha\varkappa} + \gamma^{\sigma}_{\alpha\varkappa}\gamma^{\pi}_{\sigma J}\,\omega^{J} + H_{\alpha\hat{\gamma}}\,\delta^{\hat{\gamma}}_{J}\,\nu^{\pi}_{n+1,\varkappa}\,\omega^{J}.$$

Согласно теореме Картана-Лаптева [3] следует, что для того, чтобы формы $\omega^{\rho}, \widetilde{\omega}^{\varkappa}_{\rho}$ в главном расслоенном многообразии, определенном формами $\omega^{\varkappa}, \widetilde{\omega}^{\varkappa}_{\rho}$, задавали аффинную связность, необходимо и достаточно, чтобы было задано поле объекта связности, т.е.

$$\Delta\gamma^{\pi}_{\rho\varkappa} = \gamma^{\pi}_{\rho\varkappa J}\,\omega^{J}, \qquad (3)$$

при этом тензором кручения полученного пространства аффинной связности будет тензор $\{\widetilde{R}^{\rho}_{\varkappa L}\}$, а тензором кривизны - тензор

$$\widetilde{R}^{\pi}_{\rho\varkappa L} = 2\gamma^{\pi}_{\rho[\varkappa L]}.$$

Согласно (2) соотношения (3) равносильны тому, что компоненты поля объекта аффинной связности удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\nabla\gamma^{\pi}_{\rho\sigma} = \widetilde{\gamma}^{\pi}_{\rho\sigma\varkappa}\,\omega^{\varkappa}, \quad \nabla\gamma^{\pi}_{\rho n+1} = \gamma^{\pi}_{\rho n+1}\,\omega^{n+1}_{n+1} + \widetilde{\gamma}^{\pi}_{\rho n+1,\varkappa}\,\omega^{\varkappa}. \qquad (4)$$

Уравнениям вида (4), соответственно, удовлетворяют следующие охваты:

$$H^{\pi}_{\rho\sigma} = H^{\pi\tau}H_{\tau\rho\sigma}, \quad H^{\pi}_{\rho n+1} = H^{\pi\tau}H_{\tau\rho n+1},$$

где

$$\nabla H^{\pi}_{\rho\sigma} = H^{\pi}_{\rho\sigma J}\,\omega^{J}, \quad \nabla H^{\pi}_{\rho n+1} - H^{\pi}_{\rho n+1}\,\omega^{n+1}_{n+1} = H^{\pi}_{\rho n+1,J}\,\omega^{J}.$$

Следовательно, при данной инвариантной нормализации H-распределения внутренним образом самим H-распределением определяется аффинная связность, которая задается формами

$$\omega^{\rho}, \quad \widetilde{\omega}^{\pi}_{\rho} = \omega^{\pi}_{\rho} + H^{\pi}_{\rho\varkappa}\,\omega^{\varkappa}.$$

3. Рассмотрим семейство неголономных композиций А.П.Нордена $(X(\varepsilon), \Lambda)$, внутренним образом связанных с H-распределением и определенных пучком аффиноров $\{P^{\pi}_{\rho}(\varepsilon)\}$ [1]. Будем считать, что $\varepsilon = 0$. Тогда соответствующая матрица $\|P^{\pi}_{\rho}(\varepsilon)\|$ принимает вид:

$$\|P^{\pi}_{\rho}\| = \begin{Vmatrix} -\delta^{p}_{q} & 2X^{p}_{u} \\ 0 & \delta^{v}_{u} \end{Vmatrix}.$$

Компоненты P^{π}_{ρ} удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dP^{\pi}_{\rho} - P^{\pi}_{\tau}\,\omega^{\tau}_{\rho} + P^{\tau}_{\rho}\,\omega^{\pi}_{\tau} = P^{\pi}_{\rho\varkappa}\,\omega^{\varkappa},$$

где

$$P^{p}_{q\varkappa} = -2X^{p}_{u}\Lambda^{u}_{q\varkappa}, \quad P^{p}_{u\varkappa} = 2X^{p}_{u\varkappa}, \quad P^{v}_{t\varkappa} = -2\Lambda^{v}_{t\varkappa}, \quad P^{v}_{u\varkappa} = 2X^{t}_{u}\Lambda^{v}_{t\varkappa},$$

$$dP^{\pi}_{\rho\varkappa} - P^{\pi}_{\rho J}\,\omega^{J}_{\varkappa} - P^{\pi}_{\sigma\varkappa}\,\omega^{\sigma}_{\rho} + P^{\sigma}_{\rho\varkappa}\,\pi^{\pi}_{\sigma} = P^{\pi}_{\rho\varkappa L}\,\omega^{L}.$$

По формулам

$$C^{\pi}_{\rho\varkappa} = \tfrac{1}{2}P^{\pi}_{\tau}P^{\tau}_{\rho\varkappa} \qquad (\nabla_{\delta}C^{\pi}_{\rho\varkappa} = 0)$$

строим охват тензора $\{\gamma^{\pi}_{\rho\varkappa}\}$ [4]. Следовательно, при данной инвариантной нормализации H-распределения определяется аффинная связность $\bar{\Gamma}$, которая задается формами

$$\omega^{\rho}, \quad \widetilde{\omega}^{\pi}_{\rho} = \omega^{\pi}_{\rho} + C^{\pi}_{\rho\varkappa}\,\omega^{\varkappa}.$$

В полученной связности $\overline{\Gamma}$ дифференциальные уравнения аффинора $\{P^{\pi}_{\rho}\}$ принимают вид:

$$dP^{\pi}_{\rho}-P^{\pi}_{\tau}\overline{\omega}^{\tau}_{\rho}+P^{\tau}_{\rho}\overline{\omega}^{\pi}_{\tau}=0.$$

Т е о р е м а 1. В связности $\overline{\Gamma}$ структурный аффинор $\{P^{\pi}_{\rho}\}$ ковариантно постоянен.

Аналогичный тензор деформации связности был построен для неголономной композиции А.П.Нордена на дифференцируемом многообразии в работе Видаля [4].

Построенный тензор $\{C^{\pi}_{\rho K}\}$ охвачен фундаментальными объектами второго порядка $\mathcal{H}$-распределения:

$$\| C^{\pi}_{\rho K}\| = \begin{Vmatrix} -\chi^{p}_{u}\Lambda^{u}_{qK} & -\chi^{p}_{uK}+2\chi^{p}_{v}\chi^{t}_{u}\Lambda^{v}_{tK} \\ -\Lambda^{v}_{qK} & \chi^{t}_{u}\Lambda^{v}_{tK} \end{Vmatrix}$$

4. Аналогично пункту 3 рассмотрим семейство неголономных композиций А.П.Нордена $(\Phi(\sigma), M)$, внутренним образом связанных с распределением H и определенных пучком аффиноров $\{\Phi^{\tau}_{\sigma}(\sigma)\}$. Будем считать, что $\sigma=0$. Тогда соответствующая матрица $\|\Phi^{\tau}_{\sigma}\|$ принимает вид

$$\|\Phi_{\sigma}\| = \begin{Vmatrix} -\delta^{a}_{b} & 2\varphi^{a}_{\alpha} \\ 0 & \delta^{\beta}_{\alpha} \end{Vmatrix}.$$

Компоненты Φ^{τ}_{σ} удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$d\Phi^{\tau}_{\sigma}-\Phi^{\tau}_{\rho}\omega^{\rho}_{\sigma}+\Phi^{\rho}_{\sigma}\omega^{\tau}_{\rho}=\Phi^{\tau}_{\sigma K}\omega^{K},$$

где

$$\Phi^{a}_{bK}=-2\varphi^{a}_{\alpha}M^{\alpha}_{bK},\quad \Phi^{a}_{\alpha K}=2\varphi^{a}_{\alpha K},\quad \Phi^{\alpha}_{aK}=-2M^{\alpha}_{aK},$$

$$\Phi^{\alpha}_{\beta K}=2\varphi^{c}_{\beta}M^{\alpha}_{cK},\quad M^{\alpha}_{bK}\equiv\{\Lambda^{\alpha}_{pK}, M^{\alpha}_{iK}\},$$

$$d\Phi^{\tau}_{\sigma K}-\Phi^{\tau}_{\rho K}\omega^{\rho}_{\sigma}-\Phi^{\tau}_{\sigma J}\omega^{J}_{K}+\Phi^{\rho}_{\sigma K}\omega^{\tau}_{\rho}=\Phi^{\tau}_{\sigma KJ}\omega^{J}.$$

По формулам

$$W^{\pi}_{\rho K}=\tfrac{1}{2}\Phi^{\pi}_{\tau}\Phi^{\tau}_{\rho K}\qquad(\nabla_{\delta}W^{\pi}_{\rho K}=0)$$

строим охват тензора $\{\gamma^{\pi}_{\rho K}\}$ [4]. Следовательно, при данной инвариантной нормализации H-распределения определяется аффинная связность $\overline{\overline{\Gamma}}$, которая задается формами

$$\omega^{J},\quad \overline{\overline{\omega}}^{\pi}_{\rho}=\omega^{\pi}_{\rho}+W^{\pi}_{\rho K}\omega^{K}.$$

В полученной связности $\overline{\overline{\Gamma}}$ дифференциальные уравнения аффинора $\{\Phi^{\pi}_{\rho}\}$ принимают вид

$$d\Phi^{\pi}_{\rho}-\Phi^{\pi}_{\sigma}\overline{\overline{\omega}}^{\sigma}_{\rho}+\Phi^{\sigma}_{\rho}\overline{\overline{\omega}}^{\pi}_{\sigma}=0.$$

Т е о р е м а 2. В связности $\overline{\overline{\Gamma}}$ структурный аффинор $\{\Phi^{\pi}_{\rho}\}$ ковариантно постоянен.

Тензор $\{W^{\pi}_{\rho K}\}$ охвачен фундаментальными объектами второго порядка $\mathcal{H}$-распределения:

$$\|W^{\pi}_{\rho K}\| = \begin{Vmatrix} -\varphi^{a}_{\alpha}M^{\alpha}_{bK} & -\varphi^{a}_{\alpha K}+2\varphi^{a}_{\beta}\varphi^{c}_{\alpha}M^{\beta}_{cK} \\ -M^{\beta}_{bK} & \varphi^{c}_{\alpha}M^{\beta}_{cK} \end{Vmatrix}$$

5. Рассмотрим M-распределение, оснащенное нормалями первого рода, определенными полем объекта $\{\mu^{a}\}$, где величины μ^{a} удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla\mu^{a}-\mu^{a}\omega^{n+1}_{n+1}+\omega^{a}_{n+1}=\mu^{a}_{n+1,K}\omega^{K}. \tag{5}$$

Из уравнений (5) видно, что при данном выборе полей нормалей первого рода возможна частичная канонизация репера первого порядка $\bar{R}^{1}$, при которой $\mu^{a}=0$. При этом формы ω^{a}_{n+1} становятся главными:

$$\omega^{a}_{n+1}=\mu^{a}_{n+1,K}\omega^{K}. \tag{6}$$

Такой репер называется репером, адаптированным полям нормалей первого рода, определенных объектом $\{\mu^{a}\}$. Геометрический смысл этой канонизации состоит в помещении вектора $\vec{e}_{n+1}$ в инвариантную плоскость – нормаль первого рода M-распределения. Продолжая уравнения (6), имеем

$$d\mu^{a}_{n+1,K}-\mu^{a}_{n+1,J}\omega^{J}_{K}-\mu^{a}_{n+1,K}\omega^{n+1}_{n+1}+\mu^{b}_{n+1,K}\omega^{a}_{b}-A^{a}_{\alpha K}\omega^{\alpha}_{n+1}=\mu^{a}_{n+1,KL}\omega^{L}, \tag{7}$$

где $\mu^{a}_{n+1[KL]}=0$.

В силу уравнений (6), (7) нетрудно проверить, что формы $\omega^{K},\omega^{a},\omega^{a}_{b}$ удовлетворяют следующим структурным уравнениям:

$$D\omega^{K}=\omega^{J}\wedge\omega^{K}_{J},\quad D\omega^{a}=\omega^{c}\wedge\omega^{a}_{c}+R^{a}_{\alpha K}\omega^{\alpha}\wedge\omega^{K},$$

$$D\omega^{a}_{b}=\omega^{c}_{b}\wedge\omega^{a}_{c}+\tfrac{1}{2}R^{a}_{bKL}\omega^{K}\wedge\omega^{L},$$

где величины $R^{a}_{\alpha K}, R^{a}_{bKL}$ определены соотношениями

$$R^{a}_{\alpha K}=\{A^{i}_{[\alpha\beta]}, A^{i}_{\alpha\hat{\beta}}, \nu^{i}_{n+1,\rho}, A^{p}_{[\alpha\beta]}, A^{p}_{\alpha\hat{\beta}}, \nu^{p}_{n+1,\rho}\},\quad R^{a}_{n+1,n+1}=0,$$

$$R^{p}_{qKL}=2(\Lambda^{i}_{q[K}A^{p}_{|i|L]}+\Lambda^{\alpha}_{q[K}A^{p}_{|\alpha|L]}+\Lambda_{q[K}\nu^{p}_{|n+1|L]}),$$

$$R^{i}_{jKL}=2(A^{p}_{j[K}\Lambda^{i}_{|p|L]}+M^{\alpha}_{j[K}A^{i}_{|\alpha|L]}+M_{j\hat{u}}\delta^{\hat{u}}_{[K}\nu^{i}_{|n+1|L]}),$$

$$R^{p}_{iKL}=2(M^{\alpha}_{i[K}A^{p}_{|\alpha|L]}+M_{i\hat{u}}\delta^{\hat{u}}_{[K}\nu^{p}_{|n+1|L]}),$$

$$R^{i}_{pKL}=2(\Lambda^{\alpha}_{p[K}A^{i}_{|\alpha|L]}+\Lambda_{p[K}\nu^{i}_{|n+1|L]}).$$

Следовательно, система форм $\{\omega^{a},\omega^{a}_{b}\}$ определяет аффинную связность Γ_{1} на M-распределении, индуцированную полем нормалей первого рода M-распределения.

6. Другую аффинную связность можно определить при помощи

новых форм $\hat\omega^a_b$, получающихся из форм ω^x, ω^a_b преобразованием

$$\hat\omega^a_b = \omega^a_b + \hat\gamma^a_{bx}\omega^x.$$

Для форм $\omega^x, \hat\omega^a_b$ имеем следующие структурные уравнения:

$$\begin{cases} D\omega^x = \omega^J\wedge\omega^x_J;\ D\omega^a = \omega^c\wedge\hat\omega^a_c + \frac{1}{2}\hat R^a_{xL}\omega^x\wedge\omega^L,\\ D\hat\omega^a_c = \hat\omega^b_c\wedge\hat\omega^a_b + \Delta\hat\gamma^a_{cx}\wedge\omega^x,\end{cases} \qquad (8)$$

где $\hat R^a_{xJ} = 2(-\delta^c_{[x}\hat\gamma^a_{|c|J]} + \delta^\alpha_{[x}A^a_{|\alpha|J]} + \delta^{n+1}_{[x}\mu^a_{|n+1|J]})$,

$$\Delta\hat\gamma^a_{cx} = \nabla\hat\gamma^a_{cx} + \hat\gamma^b_{cx}\hat\gamma^a_{bJ}\omega^J - M^\alpha_{cx}A^a_{\alpha J}\omega^J - M_{cx}\mu^a_{n+1,J}\omega^J,$$

$$M^\alpha_{cx} = \{\Lambda^\alpha_{px}, M^\alpha_{ix}\}, \quad M_{cx} = \{\Lambda_{px}, \delta^{\hat\alpha}_x M_{i\hat\alpha}\}.$$

Из уравнений (8) согласно теореме Картана-Лаптева [3] следует, что для того, чтобы формы $\omega^a, \hat\omega^a_b$ в главном расслоенном многообразии, определенном формами $\omega^x, \hat\omega^a_b$, задавали аффинную связность, необходимо и достаточно, чтобы было задано поле объекта связности:

$$\Delta\hat\gamma^a_{cx} = \hat\gamma^a_{cxL}\omega^L, \qquad (9)$$

при этом тензором кручения полученного пространства аффинной связности будет тензор $\{\hat R^a_{xJ}\}$, а тензором кривизны - тензор

$$\hat R^a_{bxL} = 2\hat\gamma^a_{b[xL]}.$$

Соотношения (8) равносильны тому, что компоненты поля объекта аффинной связности удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{cases} \nabla\hat\gamma^a_{bc} = \bar{\hat\gamma}^a_{bcx}\omega^x, \quad \nabla\hat\gamma^a_{b\alpha} = \bar{\hat\gamma}^a_{b\alpha x}\omega^x,\\ \nabla\hat\gamma^a_{b\,n+1} - \hat\gamma^a_{b\,n+1}\omega^{n+1}_{n+1} - \hat\gamma^a_{b\alpha}\omega^\alpha_{n+1} = \bar{\hat\gamma}^a_{b,n+1x}\omega^x.\end{cases} \qquad (10)$$

Уравнениям вида (10), соответственно, удовлетворяют следующие охваты:

$$N^a_{pc} = M^{ad}M_{dpc} - M^{aq}\Lambda_{q\alpha}\Lambda^\alpha_{pc} - M^{aj}M_{j\alpha}\Lambda^\alpha_{pc} - M^{aq}\Lambda_{q\,n+1}M_{pc} - M^{aj}M_{j\,n+1}M_{pc},$$

$$N^a_{ic} = M^{ad}M_{dic} - M^{aq}\Lambda_{q\alpha}M^\alpha_{ic} - M^{aj}M_{j\alpha}M^\alpha_{ic} - M^{aq}\Lambda_{q\,n+1}M_{ic} - M^{aj}M_{j\,n+1}M_{ic},$$

$$N^a_{c\hat\alpha} = M^{ad}M_{dc\hat\alpha} - M^{aj}M_{j\,n+1}M_{c\hat\alpha} - M^{aq}\Lambda_{q\,n+1}M_{c\hat\alpha} - M^{aq}\Lambda_{q\gamma}M^\gamma_{c\hat\alpha} - M^{aj}M_{j\gamma}M^\gamma_{c\hat\alpha} + M^{aj}M^\gamma_{jc}H_{\gamma\hat\alpha} + M^{aq}\Lambda^\gamma_{qc}H_{\gamma\hat\alpha},$$

где

$$M_{c\hat\alpha} = \{\Lambda_{p\hat\alpha}, M_{i\hat\alpha}\}, \quad M^\gamma_{c\hat\alpha} = \{\Lambda^\gamma_{p\hat\alpha}, M^\gamma_{i\hat\alpha}\}.$$

Следовательно, при данной инвариантной нормализации M-распределения внутренним образом самим M-распределением определяется аффинная связность, которая задается формами

$$\omega^a, \ \hat\omega^a_b = \omega^a_b + N^a_{bx}\omega^x.$$

7. Рассмотрим семейство неголономных композиций А.П.Нордена $(L(\varepsilon), \Lambda)$, внутренним образом связанных с $\mathcal{H}$-распределением и определенных пучком аффиноров $\{P^a_b(\varepsilon)\}$. Будем считать, что параметр $\varepsilon = 0$. Тогда соответствующая матрица $\|P^a_b\|$ принимает вид:

$$\|P^a_b\| = \begin{Vmatrix} -\delta^p_q & 2\chi^p_i \\ 0 & \delta^j_i \end{Vmatrix}.$$

Компоненты P^a_b удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla P^a_b = P^a_{bx}\omega^x,$$

где

$$P^p_{qx} = -2\chi^p_i\Lambda^i_{qx}, \quad P^p_{ix} = 2\chi^p_{ix},$$

$$P^i_{px} = -2\Lambda^i_{px}, \quad P_{jx} = 2\chi^p_j\Lambda^i_{px}, \quad \nabla P^a_{bx} = P^a_{bxJ}\omega^J.$$

По формулам

$$C^a_{bx} = \frac{1}{2}P^a_cP^c_{bx} + \delta^\alpha_x A^a_{\alpha b} + \delta^{n+1}_x\mu^a_{n+1,b},$$

где $\nabla C^a_{bx} = C^a_{bxJ}\omega^J$, строим охват тензора $\{C^a_{bx}\}$. Следовательно, при данной инвариантной нормализации M-распределения определяется аффинная связность $\bar\Gamma_1$, которая задается формами

$$\omega^a, \ \theta^a_b = \omega^a_b - A^a_{\alpha b}\omega^\alpha - \mu^a_{n+1,b}\omega^{n+1} + C^a_{bx}\omega^x.$$

В полученной связности $\bar\Gamma_1$ дифференциальные уравнения аффинора $\{P^a_b\}$ принимают вид:

$$dP^a_b - P^a_c\theta^c_b + P^c_b\theta^a_c = 0.$$

Т е о р е м а 3. В связности $\bar\Gamma_1$ структурный аффинор $\{P^a_b\}$ ковариантно постоянен.

Построенный тензор $\{C^a_{bx}\}$ охвачен фундаментальными объектами второго порядка $\mathcal{H}$-распределения:

$$\|C^a_{bx}\| = \begin{Vmatrix} -\chi^p_i\Lambda^i_{qx} + \delta^{\hat\alpha}_x A^p_{\hat\alpha q} & -\chi^p_{ix} + 2\chi^p_j\chi^q_i\Lambda^j_{qx} + \delta^{\hat\alpha}_x A^p_{\hat\alpha i} \\ -\Lambda^j_{qx} + \delta^{\hat\alpha}_x A^j_{\hat\alpha q} & \chi^p_i\Lambda^j_{px} + \delta^{\hat\alpha}_x A^j_{\hat\alpha i} \end{Vmatrix}$$

Рассматривая голономность M-распределения, приходим к выводу, что построенная связность является обобщением аналога аффинной связности, построенной Р.Ф.Домбровским [2] для касательно τ-оснащенной поверхности $M_{m,\tau}$ проективного пространства P_n.

Библиографический список

1. Г р е б е н ю к М.Ф. Дифференциально-геометрические

структуры, ассоциированные с $\mathcal{H}$-распределением аффинного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./ Калинингр. ун-т. Калининград, 1989. Вып.20. С.30-34.

2. Д о м б р о в с к и й Р.Ф. О неголономных композициях на поверхностях $M_{m,r}$ в P_n // Тез. докл. Всесоюз. науч. конф. по неевкл. геом. "150 лет геометрии Лобачевского". М., 1976. С.69.

3. О с т и а н у Н.М., Р ы ж к о в В.В., Ш в е й к и н Л.И. Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С.7-70.

4. Vidal Coste Enrique. Conexiones en las variedades custproducto y foliaciones // Collect. math. 1973. V.24. N3. P.297-324.

УДК 513.015

К ПРОЕКТИВНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ТОЧЕЧНЫХ СООТВЕТСТВИЙ ПАРЫ ГИПЕРРАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Т.А.Д у л а л а е в а

(Елабужский педагогический институт)

В данной работе рассматривается пара гиперраспределений в n-мерном проективном пространстве и изучается диффеоморфизм $f:\Omega\to\bar\Omega$ областей Ω и $\bar\Omega$, в которых заданы гиперраспределения Δ и $\bar\Delta$.

Отнесем области Ω и $\bar\Omega$ к подвижным проективным реперам $R^A=(A,A_i,A_n)$ и $\bar R^{A_n}=(A_n,A_i,A)$, где $A\in\Omega, A_n\in\bar\Omega, A_i\in\Delta(A)\cap\bar\Delta(A_n)$ $(i,j,k=1,2,\dots,n-1)$. Дифференциальные уравнения, определяющие пару гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$, имеют вид:

$$\omega_i^n=l_{i\alpha}\omega^\alpha,\quad \theta_i^n=\bar l_{i\alpha}\theta^\alpha, \tag{1}$$

$$\theta^\alpha=\Lambda_\beta^\alpha\omega^\beta\qquad (\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,n}). \tag{2}$$

Известно [3], [4], что системы величин $(l_{i\alpha})$, $(\bar l_{i\alpha})$ определяют поля геометрических объектов - поля фундаментальных объектов первого порядка гиперраспределений Δ, $\bar\Delta$ соответственно. Функции (l_{ij}), (l_{in}), $(\bar l_{ij})$, $(\bar l_{in})$ образуют поля самостоятельных объектов - поля фундаментальных подобъектов первого порядка гиперраспределений. Система величин (Λ_β^α) определяет поле геометрического объекта - поле фундаментального объекта первого порядка, порождаемое рассматриваемым отображением f:

$$\begin{gathered}
d\Lambda_j^i+\Lambda_j^i(\omega_0^0-\omega_n^n)-\Lambda_k^i\omega_j^k+\Lambda_j^k\omega_k^i=\Lambda_{j\alpha}^i\omega^\alpha+\delta_j^i\omega_n^0+\Lambda_n^i\omega_j^n,\\
d\Lambda_n^i+\Lambda_n^i(\omega_0^0-2\omega_n^n)+\Lambda_n^j\omega_j^i=\Lambda_{n\alpha}^i\omega^\alpha+\Lambda_j^i\omega_n^j,\\
d\Lambda_i^n+\Lambda_i^n(2\omega_0^0-\omega_n^n)-\Lambda_j^n\omega_i^j=\Lambda_{i\alpha}^n\omega^\alpha-\Lambda_i^j\omega_j^0+\Lambda_n^n\omega_i^n,\\
d\Lambda_n^n+2\Lambda_n^n(\omega_0^0-\omega_n^n)=\Lambda_{n\alpha}^n\omega^\alpha-\Lambda_n^i\omega_i^0+\Lambda_i^n\omega_n^i.
\end{gathered}\tag{3}$$

Функции (Λ_j^i), (Λ_n^i), (Λ_i^n) образуют поля самостоятельных объектов - поля фундаментальных подобъектов первого порядка отображения f. Функция (Λ_n^n) является относительным инвариантом диффеоморфизма f.

При равенстве нулю геометрического объекта (Λ_i^n) гиперраспределения Δ и $\bar\Delta$ являются соответствующими в индуцированном отображении f_*. Обращение в нуль геометрического объекта (Λ_j^i) $(i\neq j)$ означает существование $n-1$ различных двойных линий пары гиперраспределений $(\Delta, f_*(\Delta))$. Аналогично, обращение в нуль геометрического объекта $(\bar\Lambda_j^i)$ $(i\neq j)$ означает существование $n-1$ различных двойных линий пары гиперраспределений $(\bar\Delta, f_*^{-1}(\bar\Delta))$, где $\omega^\alpha=\bar\Lambda_\beta^\alpha\theta^\beta$ и $\bar\Lambda_\beta^\alpha\Lambda_\gamma^\beta=\delta_\gamma^\alpha$, $\Lambda_\beta^\alpha\bar\Lambda_\gamma^\beta=\delta_\gamma^\alpha$ [4].

ω^n - линия сети σ в области Ω, касающаяся прямой (AA_n) в точке A, принадлежит гиперраспределению $\bar\Delta$ тогда и только тогда, когда относительный инвариант (Λ_n^n) отображения f равен нулю [4]. ω^n - линия сети σ, как и θ^n - линия сети $\bar\sigma$ в области $\bar\Omega$, образ ω^n - линии в отображении f, является прямой линией тогда и только тогда, когда геометрический объект (Λ_n^i) $(i=1,2,\dots,n-1)$ обращается в нуль [3].

Точки $F^i=-\Lambda_n^i A+A_n$, $\bar F^i=-\bar\Lambda_i^n A_n+A$ являются фокусами прямой (AA_n). Обращение в нуль геометрического объекта (Λ_n^i) $(i=\overline{1,n-1})$ означает совпадение фокусов F^i и $\bar F^i$ прямой (AA_n). Фокусы F^i и $\bar F^i$ совпадают и при равенстве нулю геометрического объекта (Λ_i^n) $(i=1,2,\dots,n-1)$, т.е. при соответствии гиперраспределений Δ и $\bar\Delta$ в индуцированном отображении f_*.

Продолжая уравнения (3), получим:

$$\begin{gathered}
d\Lambda_{jk}^i+\Lambda_{jk}^i(2\omega_0^0-\omega_n^n)-\Lambda_{jt}^i\omega_k^t+\Lambda_{jk}^t\omega_t^i-\Lambda_{tk}^i\omega_j^t=\Lambda_{jk\alpha}^i\omega^\alpha+\Lambda_{jn}^i\omega_k^n+\Lambda_{nk}^i\omega_j^n+\\
+\Lambda_j^i\Lambda_k^t\omega_t^n+\Lambda_j^t\Lambda_k^i\omega_t^n-\Lambda_j^i\omega_k^0-\Lambda_k^i\omega_j^0+\delta_k^i\Lambda_j^t\omega_t^0+\delta_j^i\Lambda_k^t\omega_t^0,\\
d\Lambda_{jn}^i+2\Lambda_{jn}^i(\omega_0^0-\omega_n^n)-\Lambda_{kn}^i\omega_j^k+\Lambda_{jn}^k\omega_k^i=\Lambda_{jn\alpha}^i\omega^\alpha+\Lambda_{jk}^i\omega_n^k+\Lambda_{nn}^i\omega_j^n-2\Lambda_j^i\omega_n^0-\\
-\Lambda_n^i\omega_j^0+\Lambda_j^i\Lambda_n^k\omega_k^n+\Lambda_n^i\Lambda_j^k\omega_k^n+\delta_j^i\Lambda_n^k\omega_k^0,
\end{gathered}$$